

2. Sea $M_{2 \times 2}$ el espacio vectorial de todas las matrices 2×2 . Definimos $L: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ como:

$$L(A) = A - A^T, \text{ para cada } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(recordar que A^T es la traspuesta $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$)

a. (4 puntos) L es una transformación lineal.

CIERTO FALSO

JUSTIFICACION:

$$\forall A, B \in M_{2 \times 2}, L(A+B) \stackrel{?}{=} L(A) + L(B) = A - A^T + B - B^T = (A+B) - (A+B)^T = L(A+B), \text{ luego se cumple.}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \forall A \in M_{2 \times 2}, L(\lambda \cdot A) \stackrel{?}{=} \lambda \cdot L(A) = \lambda \cdot (A - A^T) = \lambda \cdot A - \lambda \cdot A^T = \lambda \cdot A - (\lambda \cdot A)^T = L(\lambda \cdot A)$$

b. (8 puntos) Sea B cualquier elemento de $M_{2 \times 2}$ tal que $B^T = -B$. Encontrar una $A \in M_{2 \times 2}$ tal que $L(A) = B$.

$$\text{RESPUESTA: } A = \frac{1}{2} B$$

JUSTIFICACION:

Observar que si $B^T = -B$, entonces $L(B) = B - B^T = B + B = 2 \cdot B$ y como

$$\text{es lineal se tiene que } B = \frac{1}{2} \cdot L(B) = L\left(\frac{1}{2} B\right)$$

c. (8 puntos) Describir el núcleo de L . Dar una base del mismo, y su dimensión.

RESPUESTA RAZONADA:

$$\text{Nuc}(L) = \left\{ A \in M_{2 \times 2} : L(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b=c \right\}$$

$$= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \text{ y } d \text{ cualesquiera} \right\} = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Además $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ son base de $\text{Nuc}(L)$ porque son lin. independientes ya que

$$\text{si } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow a=c=b=d. \text{ Dim Nuc}(L) = \# \text{ base} = 3$$

d. (5 puntos) La imagen de L es precisamente el conjunto formado por todas las matrices $B \in M_{2 \times 2}$ tales que:
(SUBRAYAR lo que sea CIERTO) $B^T = -B$ $B^T = B$

JUSTIFICACION:

Vimos en b. que $\{B \in M_{2 \times 2} : B^T = -B\} \subseteq \text{Im}(L) \equiv \text{la imagen de } L$

$$\text{Por otra parte, si } \forall A \in M_{2 \times 2}, L(A) = L\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{satisface } L(A)^T = \begin{pmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{pmatrix} = -L(A) \text{ luego } \text{Im}(L) \subseteq \{B \in M_{2 \times 2} : B^T = -B\}$$

$$\text{y, por tanto, } \text{Im}(L) = \{B \in M_{2 \times 2} : B^T = -B\}.$$