

a. (4 puntos) Si V es un espacio vectorial cualquiera, $H_\lambda: V \rightarrow V$ la dilatación (o contracción) de razón λ , es decir $H_\lambda(u) = \lambda u$, y $L: V \rightarrow V$ una aplicación lineal cualquiera, se cumple que $LH_\lambda = H_\lambda L$. CIERTO FALSO

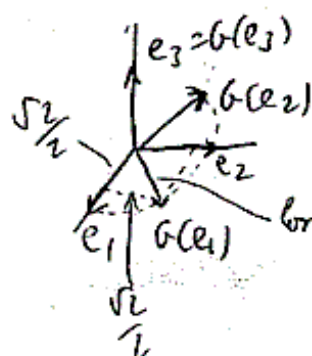
JUSTIFICACION:

$$LH_\lambda(u) = L(H_\lambda(u)) = L(\lambda u) = \lambda L(u) = H_\lambda(L(u)) = H_\lambda L(u)$$

↑
porque L es lineal

b. (7 puntos) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación que, dado un vector, lo gira 45 grados alrededor del eje vertical en sentido contrario a las agujas del reloj, y luego hace una contracción de razón $1/\sqrt{2}$ (T es una aplicación lineal, no hace falta demostrarlo). Escribir la matriz A que representa T en la base canónica.

JUSTIFICACION:



Si llamamos G al giro,

su matriz es $G = [G(e_1), G(e_2), G(e_3)] =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como la contracción multiplica todos los coeficientes por $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c. (7 puntos) Describir con palabras la transformación T^8 y escribir la matriz A^8 .

RESPUESTA RAZONADA:

Como el giro y la contracción conmutan, T^8 es "hacer 8 giros de ángulo 45° " y "8 contracciones de razón $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ". Los 8 giros dan la identidad, y las 8 contracciones resultan en una contracción de razón $(\frac{1}{\sqrt{2}})^8 = \frac{1}{16}$.

$$A^8 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

d. (7 puntos) Si $u = (1, 1, 1)$, los vectores $b_1 = u$, $b_2 = T(b_1)$, $b_3 = T(b_2)$, forman una base de \mathbb{R}^3 .

JUSTIFICACION: son tres vectores de \mathbb{R}^3 . Hay que ver si son lin. indep. CIERTO FALSO

$$b_2 = A b_1 = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$b_3 = A b_2 = A \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$|b_1, b_2, b_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \neq 0$$

e. (5 puntos) ¿Sucede lo mismo si tomamos $u = (1, 0, 0)$? ¿Y si tomamos un u arbitrario?

RESPUESTA RAZONADA:

Si tomamos $b_1 = u = (1, 0, 0)$, b_1 está en el plano XY , y por tanto $b_2 = T(b_1)$, $b_3 = T(b_2)$ también están en ese plano. Por

tanto no son lin. indep y no son base de \mathbb{R}^3 . Por tanto que $b_1, b_2 = T(b_1), b_3 = T(b_2)$ sea o no base depende de u , y en particular no lo es para $u = (1, 0, 0)$

