
Ingeniería Informática
Álgebra II

Examen Final

07.06.2002

Razonar todas las respuestas y enunciar explícitamente los resultados que se está aplicando

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\dim V = k$. Razonar detalladamente las respuestas a las siguientes preguntas.

- a) (0.75 puntos) Sean u_1, u_2, \dots, u_j , donde $j < k$ vectores linealmente independientes en V . ¿Es posible encontrar vectores, $u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_k$, de tal manera que el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ sea una base del espacio V ?
- b) (1 punto) Suponiendo que en la pregunta a) el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_j\}$ es un conjunto ortonormal de vectores (ortogonales si $i \neq j$ y todos de longitud 1), ¿podemos conseguir que u_1, u_2, \dots, u_k sea una base ortonormal?
- c) (0.75 puntos) Sea $A \cdot x = b$ un sistema no homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas. Supongamos que las columnas de A son todas ortogonales al vector b respecto al producto escalar estandar de \mathbb{R}^n . ¿Qué se puede decir sobre la existencia de soluciones?

2. Sea E un espacio vectorial, sobre los racionales, y $a, b, c, d \in E$ cuatro vectores no nulos. Definimos

$$\begin{aligned} e_1 &:= a + b + c + d & e_2 &:= 2a + 2b + c - d & e_3 &:= a + b + 3c - d \\ e_4 &:= a - c + d & e_5 &:= -b + c - d \end{aligned}$$

Llamamos relaciones de dependencia lineal, entre los vectores $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, a las expresiones

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = 0$$

con $\lambda_i \in \mathbb{Q}$.

- a) (0.5 puntos) ¿Porqué los vectores $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ no son linealmente independientes?
- b) (1.5 puntos) Suponiendo que $\{a, b, c, d\}$ son linealmente independientes encontrar explícitamente todos los vectores $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{Q}^5$, tales que los λ_i son coeficientes de una relación de dependencia lineal entre los vectores $\{e_i, i = 1, \dots, 5\}$.
- c) (0.5 puntos) ¿Qué pasa con las relaciones de dependencia lineal del apartado anterior si los vectores $\{a, b, c, d\}$ no son linealmente independientes.

3. Sea A_n la matriz $n \times n$ con entradas $a_{ij} = 1$ para todos los i, j con $i + j = n + 1$ y $a_{ij} = 0$ para todos los demás, es decir $i + j \neq n + 1$.

- a) (1 punto) Calcular el polinomio característico de A_n para $n = 4, 5, 6$.
 - b) (0.5 puntos) ¿Cuál debería ser, para n cualquiera, el polinomio característico de A_n ?
 - c) (1 punto) ¿Puedes justificar tu respuesta en el apartado anterior?
-

4. Sea $T : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ una aplicación lineal tal que la matriz correspondiente con respecto a la base estándar es

$$M(T) := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que los vectores $X_1 = (1, 1, 0, 0)$, $X_2 = (1, 0, 1, 0)$, $X_3 = (1, -1, -1, -1)$ y $X_4 = (1, 0, 0, 1)$ son vectores propios de $M(T)$.

- a) (1.25 puntos) ¿Es diagonalizable $M(T)$? Justificar.
 - b) (1.25 puntos) Encontrar los valores propios de T y sus multiplicidades.
-