

1. Sea $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $P \circ P = P$, y que la imagen de $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ por P es $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a. (7 puntos) El vector e_1 es un autovector de P con autovalor 1.

JUSTIFICACION: -

Por hipótesis, $e_1 = P(u) = \overset{\text{por ser } P=P \circ P}{P(P(u))} = P(e_1)$

☒ CIERTO ☐ FALSO

b. (7 puntos) El vector $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un autovector de P con autovalor 0.

JUSTIFICACION:

$e_2 = u - e_1$, luego $P(e_2) = P(u) - P(e_1) = e_1 - e_1 = 0$

☒ CIERTO ☐ FALSO

c. (6 puntos) P asocia a cada vector su proyección ortogonal sobre la recta $\text{Gen}\{e_1\}$.

JUSTIFICACION:

$\{e_1, e_2\}$ es base de \mathbb{R}^2 , y tanto $e_1 = P(e_1)$ como $0 = P(e_2)$ son sus respectivas proyecciones sobre esa recta.

☒ CIERTO ☐ FALSO

d. (5 puntos) La matriz B de la transformación P es simétrica.

JUSTIFICACION:

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $P(e_1) \swarrow \searrow P(e_2)$

☒ CIERTO ☐ FALSO

3. En cada uno de los siguientes apartados, A, B, R son matrices cualesquiera, no necesariamente invertibles (en a., se sobreentiende que son cuadradas, y cada vez que hay un producto se sobreentiende que las dimensiones permiten hacerlo).

a. (5 puntos) Si $AR = RB$ entonces $\det A = \det B$.

JUSTIFICACION:

Sería cierto si fuese $\det(R) \neq 0$; pero si no, puede darse la 1ª igualdad sin la 2ª, p.ej.: $R=0, I=A=2B$.

☒ CIERTO ☐ FALSO

b. (5 puntos) $\text{Ker}(A) = (\text{Im}(A^T))^{\perp}$.

JUSTIFICACION: Porque $\text{Im}(A^T) = \text{Gen}(\text{filas de } A)$, y

$\text{Ker}(A) = \{ \text{soluciones de } Ax=0 \} = \{ x \text{ que son } \perp \text{ a cada fila de } A \}$

☒ CIERTO ☐ FALSO

c. (5 puntos) Si b es ortogonal al $\text{Ker}(A^T)$, entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución.

JUSTIFICACION: $Ax=b$ tiene solución $\Leftrightarrow b \in \text{Im } A$

Pero $\text{Im}(A) = (\text{Ker}(A^T))^{\perp}$, por lo dicho en el apartado b.

☒ CIERTO ☐ FALSO

d. (5 puntos) $\text{Rango}(AB) \leq \text{rango}(B)$.

JUSTIFICACION: (en DOS VERSIONES):

1) $\text{rango}(AB) = \dim(\text{Gen}(\text{filas de } AB))$, y filas de $AB \subset \text{Gen}(\text{filas de } B)$

2) Si $n = n^\circ \text{ col de } B$ (ó de AB), es $n = \dim \text{Ker}(AB) + \text{rango}(AB) = \dim \text{Ker}(B) + \text{rango}(B)$, y $\text{Ker}(B) \subset \text{Ker}(AB)$

☒ CIERTO ☐ FALSO

e. (5 puntos) Si las soluciones x de $ABx = 0$ son las mismas que las de $Bx = 0$, es que A es invertible.

JUSTIFICACION:

La hipótesis dice: $ABx=0 \Rightarrow Bx=0$, es decir, $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(B) = \{0\}$, y eso se cumple p.ej. si $A=B=B \circ B$ (una proyección), sin que A sea invertible.

☒ CIERTO ☐ FALSO