

2. Sean $\{v_1, v_2, v_3\}$ las columnas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- a. (6 puntos) Si $c^T = (1, 0, 0, 1)$, hallar la solución con mínimo error cuadrático de $Ax = c$.

JUSTIFICACION:

Es la solución de $(A^T A)x = A^T c$, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

RESPUESTA:

$x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

- b. (6 puntos) Expresar c como suma de un elemento $L = \text{Gen}(v_1, v_2, v_3)$ y otro de su ortogonal.

JUSTIFICACION:

El sumando en L es la $\text{proy}_L(c) = Ax$, con el x hallado en a.

RESPUESTA:

$c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- c. (7 puntos) La ecuación $Ax = b$ tiene solución exacta si y sólo si es $b \perp u = (1, 1, 1, 1)$.

JUSTIFICACION:

Porque eso equivale a " $b \in L$ ", y el vector u engendra L^\perp .

CIERTO — FALSO

- d. (6 puntos) Hallar una base ortogonal del subespacio L .

JUSTIFICACION:

Son los que da Gram-Schmidt: $\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 + w_1/2 \\ w_3 = v_3 + w_2/3 \end{cases}$

RESPUESTA:

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ -1 \end{bmatrix}$
 $w_1 \quad w_2 \quad w_3$

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 6/5 & 2/5 \\ 2/5 & 9/5 \end{bmatrix}$.

- a. (4 puntos) La matriz A es diagonalizable.

JUSTIFICACION:

A es simétrica, y todas ellas son diagonalizables.

CIERTO — FALSO

- b. (8 puntos) Una matriz diagonal D y una matriz ortogonal P tales que $P^t A P = D$ son

JUSTIFICACION:

Las cols de P son autovectores de A : puede verificarse que $AP = PD$, es decir $\lambda = 2, 1$ son los correspondientes autovalores. El factor $1/\sqrt{5}$ es el que normaliza las cols de P , para que sea ortogonal.

$D = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix}, P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

- c. (4 puntos) Consideramos la forma cuadrática

$q(x_1, x_2) = \frac{6}{5}x_1^2 + \frac{4}{5}x_1x_2 + \frac{9}{5}x_2^2$

Con respecto a las variables $y_1 = \frac{x_1 + 2x_2}{\sqrt{5}}, y_2 = \frac{2x_1 - x_2}{\sqrt{5}}$, la forma se escribe (sin término y_1y_2) como

JUSTIFICACION:

$q(y_1, y_2) = 2y_1^2 + y_2^2$

$q(x) = x^T A x = x^T P D P^T x = y^T D y$, con $y = P^T x$.

- d. (3 puntos) q es definida positiva.

JUSTIFICACION:

Ambos coeficientes de las y_i^2 son > 0 .

CIERTO — FALSO

- e. (6 puntos) Dibuja un bosquejo de la curva $\frac{6}{5}x_1^2 + \frac{4}{5}x_1x_2 + \frac{9}{5}x_2^2 = c$, con $c > 0$, señalando sobre la curva sus ejes de simetría.

