

APELLIDOS..... D.N.I.....
 NOMBRE..... GRUPO.....

1. (3 pts.) Consideramos la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f \circ f \equiv 0$; $f(1, 1, 1, 1) = (1, 1, 0, 0)$ y $f(1, 1, 1, 0) = (1, 0, 0, 0)$.

i) Dar bases de los subespacios

Núcleo(f) =

Imagen(f) =

ii) Escribir la matriz de f , M , respecto de la base canónica de \mathbb{R}^4 : $M = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

iii) Calcular

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

2. (3pts) Consideramos el endomorfismo de \mathbb{R}^5 definido por la siguiente matriz respecto de la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) El polinomio característico de A , $P_A(x)$, es:

b) Escribir, cuando existan, bases de

Núcleo($A + 3I$):

Núcleo($A + 3I$)²:

Núcleo($A + 3I$)³:

Espacio cociente Núcleo($A + 3I$)²/Núcleo($A + 3I$):

Núcleo(A):

Núcleo(A)²:

Espacio cociente Núcleo(A)²/Núcleo(A):

Núcleo($A + 7I$):

Núcleo($A + 7I$)²:

Espacio cociente Núcleo($A + 7I$)²/Núcleo($A + 7I$):

c) ¿Es A diagonalizable?

¿Existe una base de \mathbb{R}^5 formada por autovectores de A ?

d) Escribir la matriz de Jordan de A . J_A :

$$J_A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3. (2,5 pts.) Consideramos el espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales, $\mathbb{R}^{(3)}[x]$, con el siguiente producto escalar:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx, \quad \forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}^{(3)}[x]$$

a) Escribir una base ortogonal, llamémosla $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, del subespacio de $\mathbb{R}^{(3)}[x]$ generado por $\{2, x^2, 1+x\}$, y tal que el subespacio $\text{gn}(\{p_1\}) = \text{gn}(\{2\})$ y el subespacio $\text{gn}(\{p_1, p_2\}) = \text{gn}(\{2, x^2\})$

$$p_1(x) = \dots\dots\dots$$

$$p_2(x) = \dots\dots\dots$$

$$p_3(x) = \dots\dots\dots$$

b) Con los resultados obtenidos en el apartado a), efectuar explícitamente el siguiente cálculo:

$$\langle p_3(x), p_2(x) \rangle = \dots\dots\dots$$

$$\langle p_3(x), p_3(x) \rangle = \dots\dots\dots$$

$$\langle p_3(x), p_1(x) \rangle = \dots\dots\dots$$

$$\langle p_3(x), p_1(x) + 2p_2(x) + 3p_3(x) \rangle = \dots\dots\dots$$

4. (1 pto.) Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo, $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base ortonormal de E y $\{u'_1, u'_2, u'_3\}$ su base dual.

Consideremos las aplicaciones lineales $L_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ (con $i = 1, 2$ y 3), definidas por $L_i(v) = \langle v, u_i \rangle \quad \forall v \in E$. Demostrar que $L_2 = u'_2$.