

Álgebra I
Primero de Ingeniería Informática
Curso 2000-2001

Examen Final. 13 de Febrero de 2001

1. (2 puntos) Contestar brevemente a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Es cierto que, para cualesquiera conjuntos C y D , se cumple que

$$(C \times C) \setminus (D \times D) = (C \setminus D) \times (C \setminus D)?$$

(b) La tabla de un grupo G con n elementos es una matriz $n \times n$. ¿Cuántas veces aparece el elemento neutro e en esa tabla?

(c) Describir qué polinomios son irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

(d) Encontrar un entero x , $75 \leq x \leq 92$, tal que $x \equiv 34^{37}$ módulo 19.

2. (2 puntos) Sea f la función de \mathbb{R} en \mathbb{R} dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 1, \\ x-1, & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

a) Comprobar que f es biyectiva.

b) Dar una expresión de f^{-1} .

c) Dar una expresión de $f \circ f$.

3. (1 punto) Consideremos el conjunto \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 100, 1 \leq y \leq 100\}.$$

Se define en \mathcal{C} la relación de equivalencia \mathcal{R} dada por

$$[(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2)] \text{ si y sólo si } [\text{máximo}(x_1, y_1) = \text{máximo}(x_2, y_2)].$$

¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene?

4. (2 puntos)

(a) Hallar **todos** los enteros x e y que satisfacen la ecuación

$$15x + 13y = 1.$$

(b) Resolver (si es que tiene solución) el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 11 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{10} \end{cases}$$

5. (2 puntos) Considérese la permutación σ de S_9 dada por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 8 & 4 & 2 & 7 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Describir σ^{48} .

6. (1 punto) Dar un argumento para justificar que si (G, \cdot) es un grupo y si a y b son elementos de G que cumplen que:

$$b^8 = e \quad a \cdot b = b^4 \cdot a$$

entonces

$$b^2 = e$$

(Aquí, e es el elemento neutro del grupo G y la operación del grupo se denota por " \cdot ").