

**Álgebra I**  
**Primero de Ingeniería Informática**

**Examen de febrero, 6-2-2002**

**1. (2 puntos)**

(a) Demostrar que, dados unos conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ ,

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C).$$

(b) Sea  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  una aplicación inyectiva. ¿Se verifica que  $f \circ f$  es inyectiva?

**2. (2 puntos)**

(a) ¿Es cierto que la ecuación diofántica  $6x + 15y = 10$  tiene infinitas soluciones?

(b) Hallar el resto de dividir  $11^{106}$  por 107.

**3. (2 puntos)**

(a) ¿Existe alguna permutación en  $S_{20}$  cuyo orden sea 130?

(b) Sean  $G$  y  $G'$  dos grupos finitos y  $\phi: G \mapsto G'$  un isomorfismo entre ellos. Probar que si  $G$  es cíclico entonces  $G'$  es también cíclico.

**4. (2 puntos)**

(a) Hallar los factores irreducibles en  $\mathbb{Q}[x]$  del polinomio  $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ .

(b) Sea el polinomio  $q(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$  en  $\mathbb{Q}[x]$ . Hallar el máximo común divisor de  $p(x)$  y  $q(x)$ .

**5. (2 puntos)** La recaudación de una tragaperras (que sólo admite monedas de un euro) ha sido hoy menor que 1000 euros. Al intentar cambiar las monedas por billetes de 5 euros sobran 3 monedas. Cuando las apilamos en montones de 13 monedas sobran 7. Así que decidimos repartirlas entre nuestros 17 sobrinos y nos faltan 2. ¿Cuántas monedas hay?

**6. (Este ejercicio es de una dificultad superior a la de los anteriores y supone 1 punto extra sobre el 10).** En  $\mathbb{R}$  se considera la siguiente relación  $\mathcal{R}$ : decimos que  $x_1 \mathcal{R} x_2$  si y solo si  $x_1 = x_2$ , o bien existe un polinomio de grado 2 y coeficientes racionales cuyas raíces son  $x_1$  y  $x_2$ .

Comprobar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia