

Álgebra I
Primero de Ingeniería Informática

Examen de septiembre, 3-9-2002

1. (2 puntos)

(a) Sea $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ y consideremos $X = A \times A$. Se define la relación \mathcal{R} en X dada por

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff a + b = c + d.$$

Probar que es de equivalencia.

(b) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ x - 2002 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Comprobar si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

2. (2 puntos)

(a) ¿Es cierto que $3^{24} \equiv 1 \pmod{39}$?

(b) Hallar todos los enteros x tales que $x \equiv 7 \pmod{12}$ y $x \equiv 4 \pmod{15}$.

3. (2 puntos)

(a) Escribir como composición de ciclos disjuntos la siguiente permutación de S_8 :

$$\sigma = (1234) (3456) (5678),$$

y calcular su orden.

(b) Sea $(G, *)$ un grupo. Probar que dados $a, b \in G$, el inverso de $a * b$ es $b^{-1} * a^{-1}$.

4. (2 puntos) Sea $p(x) = x^3 + 3x + 111$. Determinar **los grados** de los factores irreducibles de $p(x)$ en

(a) $\mathbb{Q}[x]$ (indicación: comprobar que si $n \in \mathbb{Z}$ entonces $n^3 + 3n$ es par).

(b) $\mathbb{R}[x]$ (indicación: dibujar la gráfica).

(c) $\mathbb{C}[x]$.

5. (2 puntos)

(a) Hallar todas las soluciones de la ecuación diofántica $307x + 1524y = 1$.

(b) De entre las soluciones (x, y) de la ecuación anterior, ¿hay alguna con $1524000 \leq x \leq 1524500$?

6. (Este ejercicio es de una dificultad superior a la de los anteriores y supone 1 punto extra sobre el 10).

(a) Calcular 2^n módulo 6, para $n = 1, 2, 3, \dots$

(b) Usar lo anterior para calcular a_{13} módulo 7, donde $a_1 = 2$ y $a_{k+1} = 2^{a_k}$, para cada $k = 1, 2, \dots$