

INGENIERÍA INFORMÁTICA

Examen final de Cálculo I.

21 de enero de 2003

Modelo 4

Orientaciones generales:

El examen dura tres horas. No se permite el uso de apuntes ni de calculadoras.

Como norma no se permite salir del aula hasta entregado el examen.

Todo problema vale 1 punto. Las respuestas equivocadas descuentan 0.25.

Problema 1. El límite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}$ vale: A) $\frac{14}{5}$. B) $\frac{7}{6}$. •C) $\frac{7}{5}$. D) $\frac{5}{7}$.

Problema 2. La integral $\int_0^1 \frac{-dx}{\sqrt{1+x^2}}$ vale:

- A) $\ln(1+\sqrt{2})$. B) $\ln(2+\sqrt{2})$. C) $\ln(\sqrt{2}-1)$. D) $\ln\sqrt{2}$.

Problema 3. Se consideran las series (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \frac{n}{1000})^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{n}{1000})^n$.

Dígase cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

- A) Las dos series divergen.
- B) La serie (1) converge, pero no absolutamente y la serie (2) converge absolutamente.
- C) La serie (1) converge absolutamente y la serie (2) converge, pero no absolutamente.
- D) Las dos series convergen absolutamente.

Problema 4. Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_0^x \frac{t^3 - t}{e^t + 1} dt$. Sin calcular la integral, dígame cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

- A) f tiene un mínimo global.
- B) f tiene tres mínimos locales.
- C) f no tiene ni máximos ni mínimos locales.
- D) f tiene dos máximos locales.

Problema 5. La integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$ vale:

- A) $\frac{\pi^2}{4} - 2$. B) $\frac{\pi^2}{4} + 1$. C) $\frac{\pi}{2} + 1$. D) $\frac{3\pi}{4} + 1$.

Problema 6. Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por recurrencia mediante

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dígame cuál de las afirmaciones siguientes es cierta para $\{a_n\}$:

- A) Es monótona, acotada y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.
- B) No es monótona, es acotada y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.
- C) Es monótona, no es acotada y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.
- D) Es monótona, no acotada y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Problema 7. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tres veces diferenciable tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 + 6x + 8x^3}{x^3} = 0. \text{ Entonces}$$

- A) $f(0) = 2, f'(0) = 6.$ B) $f''(0) = 0, f'''(0) = 8.$
- C) $f''(0) = 0, f'''(0) = -48.$ D) $f(0) = -2, f'(0) = -6.$

Problema 8. Se considera la función $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Dígame cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

- A) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ es biyectiva y $(f^{-1})'(0) = 1$.
- B) $f: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ es biyectiva y $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$.
- C) $f: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ es biyectiva y $(f^{-1})'(0) = 2$.
- D) $f: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ es biyectiva y $(f^{-1})'(0) = 1$.

Problema 9. El área que determinan en el primer cuadrante las rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 2$ y la curva $y = \frac{1}{x^3}$ vale: A) $\frac{5}{4}$. B) $\frac{9}{8}$. • C) $\frac{7}{8}$. D) 1.

Problema 10. Dadas las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = e^x$, dígame cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

- A) $(g \circ f)'(\frac{\pi}{2}) = 2.$ • B) $(g \circ f)'(\frac{\pi}{2}) = 0.$ C) $(g \circ f)'(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}.$ D) $(g \circ f)'(\frac{\pi}{2}) = 1.$