

EXÁMEN ANÁLISIS MATEMÁTICO
Febrero 2000
Universidad Autónoma

1. Todas las soluciones de la ecuación $|x+2| < \frac{4}{|x-2|}$ son:
 - a. No tiene ninguna solución
 - b. $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$
 - c. $(-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$
 - d. $(-\infty, -2\sqrt{2})$
 - e. Ninguna de las anteriores
2. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:
 - a. Toda sucesión acotada tiene límite
 - b. Toda sucesión monótona y acotada inferiormente tiene límite
 - c. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 3$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$
 - d. **Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente tiene límite**
 - e. Ninguna de las anteriores
3. Sea $\{x_n\}$ la sucesión definida por $x_1=5$, $x_{n+1}=x_n\sqrt{1+n}$. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:
 - a. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ es convergente
 - b. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right)^2$ es convergente
 - c. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)}$ es convergente
 - d. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}^2} \right)$ es divergente
 - e. Ninguna de las anteriores
4. Considerar la función f definida como $f(x) = -\ln\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ si $x \geq -1$ y $f(x) = ax + a + \ln(3/2)$ si $x < -1$, que depende del parámetro a . Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:
 - a. Para todo a la función f no es derivable en el punto $x=-1$
 - b. La función f tiene un mínimo local en $x=-1$ si $a \leq 0$
 - c. **La función f tiene un máximo local en $x=-1$ si $a > 0$**
 - d. La función f es derivable en todo \mathbb{R} para cualquier valor de a
 - e. Ninguna de las anteriores
5. Sean f una función cuya derivada es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y c un punto en el intervalo (a,b) tal que $f'(c) > 0$. ¿Qué se puede decir de la serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f\left(c - \frac{1}{n}\right) \right)?$$
 - a. Diverge porque el término general no tiende a 0.
 - b. Converge, pero no absolutamente.
 - c. Converge absolutamente
 - d. **Diverge.**
 - e. Ninguna de las anteriores.

Evalúa los siguientes límites:

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5}}{\ln x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + e^{-x^2} - 2}{x^2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{3 \operatorname{tg} x}{-3 + \sec x}$

- a. i) 0 ii) 1 iii) 1
b. i) $+\infty$ ii) 1 iii) 3
c. i) 0 ii) -1 iii) 1/3
d. i) $+\infty$ ii) -1 iii) 1
e. Ninguna de las anteriores

7. Sea f una función derivable, estrictamente creciente y positiva en todo su dominio, tal que

$$f(1)=2, f(2)=4$$

$$f'(1)=3, f'(2)=2$$

Si definimos $g=f^2$, ¿Cuánto vale $(g^{-1})'(4)$?

- a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{1}{12}$ c. $\frac{1}{8}$ d. $\frac{1}{6}$ e. Ninguna de las anteriores

8. Halla el grado n del polinomio de Taylor de $f(x)=\ln(1+x)$ en $x=0$ que puede usarse para calcular $\ln(1.2)$ con un error inferior a 10^{-10} .

- a. $n=10$
b. $n=20$
c. $n=9$
d. Valen todas las anteriores
e. Ninguna de las anteriores

9. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- a. Toda función continua en un intervalo cerrado es derivable.
b. Toda función continua en un intervalo cerrado acotado $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$.
c. Toda función derivable en un intervalo abierto (a,b) tiene máximo en (a,b) .
d. Toda función acotada tiene mínimo en su dominio de definición.
e. Ninguna de las anteriores.

10. Si f es la función definida como $f(x)=|2x|$ para $-1 \leq x < 2$, $f(x)=6-x$, si $2 \leq x < 3$ y $f(x)=(18+x^2)^{1/3}$ cuando $3 \leq x < 4$, definimos la función $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a. F tiene un mínimo local en $x=0$.
b. F es derivable en todo el intervalo $(-1,4)$.
c. F es continua en $[-1,4]$ y tiene un máximo relativo en $x=3$.
d. F no es derivable en el punto $x=3$ y, por tanto, no es continua en ese punto.
e. Ninguna de las anteriores.

11. Indica cuál de las siguientes integrales puede servir para calcular el área de la región plana limitada por la gráficas de las funciones

$$f(x)=-|x-1|+1$$

$$\text{y } g(x)=(x-1/2)^2-1/4$$

entre $x=0$ y $x=\sqrt{3}$

- a. $\int_0^1 [x-g(x)]dx + \int_1^{\sqrt{3}} [(-x+2)-g(x)]dx + \int_{\sqrt{3}}^2 [g(x)-(-x+2)]dx$
b. $\int_0^{\sqrt{3}} [g(x)-f(x)]dx$
c. $\int_0^{\sqrt{2}} [f(x)-g(x)]dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} [f(x)-g(x)]dx$
d. $\int_0^{\sqrt{2}} [x-g(x)]dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} [g(x)-f(x)]dx$
e. Ninguna de las anteriores

12. Halla la derivada de la función

$$G(x) = \int_{x-1}^{x^2} e^{t^2} dt$$

- a. $4x^2 e^{x^2} - 4(x-1)e^{(x-1)^2}$
- b. $2xe^{x^2} - e^{(x-1)^2}$
- c. $2xe^{x^2} - e^{(x-1)^2}$
- d. $8xe^{x^2} - 4(x-1)e^{(x-1)^2}$
- e. Ninguna de las anteriores

13. Hallar las integrales

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx; \quad I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x dx;$$

e indicar cual de las siguientes afirmaciones es correcta

- a. $I_1 + I_2 = 3\pi/4$
- b. $I_2 - I_1 = \pi/2$
- c. $I_1 + I_2 = \pi/2$
- d. $I_2 - I_1 = \pi/8$
- e. Ninguna de las anteriores

14. Calcular las siguientes integrales

$$\text{i) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}, \quad \text{ii) } \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2}, \quad \text{iii) } \int_0^{-\infty} x e^{-x} dx$$

- a. i) $\frac{\pi}{2}$, ii) $2/3$, iii) 1 ;
- b. i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ii) $1/3$, iii) $1/2$;
- c. i) $2-2\sqrt{3}$, ii) $2/3$, iii) 1 ;
- d. i) $\sqrt{3}$, ii) $1/3$, iii) -1 ;
- e. Ninguna de las anteriores

15. Sea $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ para $x \in (2, +\infty)$. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- a. Existe la integral impropia de f sobre $(2, +\infty)$;
- b. Existe la integral impropia de f sobre $(3, +\infty)$;
- c. **Existe la integral impropia de f sobre $(2,3]$;**
- d. Existe la integral impropia de f^2 sobre $(2, +\infty)$;
- e. Ninguna de las anteriores.