

**Solucionario<sup>1</sup> (por extenso e ilustrado) del examen de Matemática Discreta**  
**17 de junio de 2002**

1. (4 puntos) Decide si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, razonando el porqué:

- (a) Se seleccionan 11 números distintos del conjunto  $\{1, \dots, 100\}$ . Entonces, hay al menos dos de ellos, digamos  $x$  e  $y$ , que cumplen que  $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$ .

• **SOLUCIÓN: Verdadera.** Llamemos  $S$  al conjunto de números seleccionados. Observemos primero que si  $S$  tuviera 10 elementos, podría no ser suficiente. Por ejemplo,  $S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$  son 10 números para los que no se cumple la condición. Pero  $S$ , nos dicen, tiene 11 elementos. Las raíces cuadradas de los números entre 1 y 100 están entre 1 y 10. Ya se intuye que: las “palomas” serán las raíces cuadradas, y los “palomares”, más o menos, los intervalos de longitud 1 de  $[1, 10]$ .

Una manera de formalizar esto: definimos la aplicación  $f : S \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  que a cada  $k \in S$  le asocia  $f(k) = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$  (el suelo, o parte entera, de  $\sqrt{k}$ ). Y ahora, sea cual sea  $S$ , el principio del palomar nos dice que existen al menos dos elementos (distintos), digamos  $x$  e  $y$ , para los que  $f(x) = f(y)$ . Esto es, para los que  $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{y} \rfloor$ . Y esto supone que  $\sqrt{x}$  y  $\sqrt{y}$  distan menos de 1.

- (b) Dado un grafo  $G$  con  $n$  vértices, siempre existe una ordenación de los vértices para la que el algoritmo austero es óptimo; esto es, emplea exactamente  $\chi(G)$  colores.

• **SOLUCIÓN: Verdadera.** Sabemos que  $G$  se puede colorear con exactamente  $\chi(G)$  colores. Supongamos que los colores son, ordenados, rojo, azul, etc.

Tomemos una coloración óptima, que partirá los vértices de  $V$  en  $\chi(G)$  bloques no vacíos (los que van de rojo, los que van de azul, etc.). No puede haber aristas entre vértices del mismo bloque (pues llevan el mismo color), aunque sí que debe haber alguna entre bloques. Así que ordenamos los vértices siguiendo esta partición: los que van de rojo, por ejemplo, son los primeros, luego van los de azul, etc. Con esa ordenación, el algoritmo austero colorea, por supuesto, los primeros vértices de rojo. Los del siguiente bloque los colorea de azul (si tienen arista con los del primero) o quizás de rojo. Y así, sucesivamente, de forma que nunca se utilizan más de  $\chi(G)$  colores (y, como acaba con una coloración válida, al menos emplea  $\chi(G)$  colores).

Nótese la pequeña “trampa”: el argumento se basa en que ya tenemos una coloración óptima. Así que no es algo que nos pueda guiar, en la práctica, para ordenar los vértices antes de aplicar el algoritmo austero.

- (c) Fijamos un  $p$ ,  $0 < p < 1$ , y consideramos una variable aleatoria  $X$  que toma valores en  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Cada valor se toma con probabilidad  $p_n = \mathbf{P}(X = n) = (1 - p)^n p$ , para cada  $n \geq 0$ . Entonces, la media de esta variable es  $\mathbb{E}(X) = p/(1 - p)$ .

• **SOLUCIÓN: Falsa.** Recuerdo que esta distribución de probabilidad se denomina **distribución geométrica**. La mejor manera de abordar el problema es considerar funciones generatrices de probabilidad. La asociada a la variable aleatoria  $X$  es

$$F_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n s^n = p \sum_{n=0}^{\infty} [(1-p)s]^n = \frac{p}{1 - (1-p)s}.$$

Sabemos que  $\mathbb{E}(X) = F'_X(1)$ . Así que calculamos la derivada de  $F_X(s)$ ,

$$F'_X(s) = \frac{d}{ds} \left[ \frac{p}{1 - (1-p)s} \right] = \frac{p(1-p)}{[1 - (1-p)s]^2}.$$

Al evaluar en  $s = 1$ , obtenemos que  $\mathbb{E}(X) = F'_X(1) = (1-p)/p$ .

<sup>1</sup>En estas páginas aparecerán las respuestas a los ejercicios. Y algunas de las distintas maneras de abordarlos (pero podría haber otras igualmente correctas).

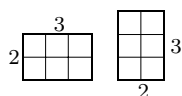
- (d) El número de formas de distribuir  $n$  bolas numeradas en  $k$  cajas numeradas es  $k^n$ . Y si ninguna caja puede quedar vacía, entonces es  $k! S(n, k)$ .

• **SOLUCIÓN: Verdadera.** Para distribuir  $n$  bolas numeradas en  $k$  cajas numeradas, hay que decidir a qué caja va cada bola. O, lo que es lo mismo, construir una lista de  $n$  posiciones, en cada una de las cuales situamos uno de los  $k$  símbolos (las cajas). Hay  $k^n$  de estas listas. Nótese que, en otros términos, es el número de aplicaciones que hay de un conjunto con  $n$  elementos (bolas) en uno de  $k$  elementos (cajas). Si no pueden quedar cajas vacías, lo que tenemos que contar son las aplicaciones sobreyectivas. Para contarlas, partimos primero el conjunto de  $n$  bolas en  $k$  bloques no vacíos (hay  $S(n, k)$  maneras de hacerlo). Ya sabemos qué bolas van “juntas”. Ahora sólo queda decidir a qué caja corresponde cada uno de estos  $k$  bloques. Y hay  $k!$  maneras de hacerlo, claro.

2. (a) (1 punto) Tenemos cuadraditos de lado 1 y queremos construir rectángulos cuyo perímetro sea  $2k$ . ¿De cuántas formas lo podremos hacer?

• **SOLUCIÓN:** Lo de los cuadraditos es sólo para asegurar que las longitudes de los lados de los rectángulos sean números naturales. Y tomar perímetro  $2k$  es sólo para insistir en que el perímetro resulta ser siempre un número par. Recuerdo que cuando hablamos de “rectángulos” también incluimos el caso de los cuadrados. Nótese solo tienen sentido valores  $k \geq 2$ .

Ah, y algo que preguntábais mucho en el examen: digamos que estamos con  $k = 5$  (perímetro 10). Los dos rectángulos que dibujo a la izquierda,



¿hay que contarlos como diferentes? Si fuera así, ¿por qué no considerar también el que dibujo a la derecha? (o cualquier otro que dibujemos rotado). No, claro que no: un rectángulo queda determinado por lo que miden sus dos lados, nada más.

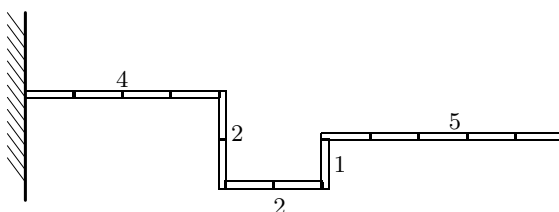
Así que la respuesta, una vez que quitamos un 2 que anda por ahí, es el número de maneras de escribir  $k$  como **suma de dos** números naturales. Como el orden de presentación de estos dos sumandos es irrelevante, una posible (y elegante) respuesta es  $p_2(k)$ , el número de particiones de  $k$  con 2 sumandos.

No hay una fórmula general para  $p_r(k)$ , pero en este caso podemos obtenerla, con un argumento combinatorio: si el orden de los sumandos fuera importante, la respuesta sería

$$\# \text{ sols. de } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = k \\ x_1, x_2 \geq 1 \end{array} \right\} = \binom{k + (2 - 1) - 2}{2 - 1} = \binom{k - 1}{1} = k - 1$$

(esto se podía haber contado a mano, la verdad). Si  $k$  es impar, cada dos de estas soluciones dan lugar al mismo rectángulo, así que  $(k - 1)/2$  es la respuesta. Si  $k$  es par, hay una configuración especial (los dos lados iguales) que hay que considerar aparte, y se obtiene  $1 + (k - 2)/2 = k/2$ . Para quien sea amigo de las fórmulas cerradas,  $\lfloor k/2 \rfloor$  es una respuesta válida para  $k \geq 2$  general.

- (b) (1 punto) Ahora tenemos  $n$  barras de un metro de longitud, y queremos situarlas en cinco tramos: derecha, abajo, derecha, arriba y derecha, con la condición de que los tres primeros tengan longitudes pares, y los dos últimos impares. El del dibujo es una de las posibilidades para  $n = 14$ .



¿De cuántas maneras lo podremos hacer?

• SOLUCIÓN: Observemos primero que si  $n$  es impar, no hay manera alguna de construir los tramos. Si llamo  $x_j$  a la longitud del tramo  $j$ , buscamos el número de soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n \\ x_1, x_2, x_3 \text{ pares} \geq 2 \quad x_4, x_5 \text{ impares} \geq 1 \end{array} \right\}$$

Aplicamos el método de funciones generatrices<sup>a</sup> que hemos visto varias veces: consideramos las funciones

$$\begin{aligned} \sum_{m \text{ par} \geq 2} x^m &= \sum_{m=1}^{\infty} x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} - 1 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2} \\ \sum_{m \text{ impar}} x^m &= \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m+1} = x \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} = \frac{x}{1-x^2} \end{aligned}$$

Y la respuesta que buscamos está en el coeficiente  $n$ -ésimo del desarrollo de Taylor de la función

$$f(x) = \left( \frac{x^2}{1-x^2} \right)^3 \left( \frac{x}{1-x^2} \right)^2 = \frac{x^8}{(1-x^2)^5}$$

Por un momento, y para facilitar los cálculos, llamaré  $z = x^2$ :

$$f(x) = \frac{z^4}{(1-z)^5} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{4+m}{4} z^{m+4} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+4}{4} x^{2(m+4)} \stackrel{m+4=n}{=} \sum_{n=4}^{\infty} \binom{n}{4} x^{2n}.$$

La respuesta final es: 0, si  $n$  impar,  $\binom{n/2}{4}$  si  $n$  es par (nótese que se debe tener que  $n \geq 8$ ).

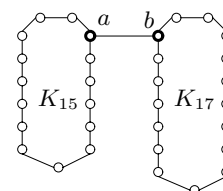
<sup>a</sup>Aunque hay una manera de abordar el problema sin utilizarlas. La pista:  $n$  ha de ser par, así que podemos reescribir la ecuación diofántica de manera apropiada.

**3.** (2 puntos) Una empresa reúne a empleados de dos sedes distintas: de la sede  $A$  vienen 15, incluyendo el jefe; de la sede  $B$ , otros 17, jefe incluido. Se dispone de 22 salas de reunión.

(a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir en esas salas si en una misma sala no debe haber empleados de la misma sede; y los respectivos jefes han de estar en salas distintas? ¿Cuál es el mínimo número de salas con que se puede hacer una distribución?

• SOLUCIÓN: Formamos un grafo  $G$  con 32 vértices (todos los empleados), cuyas aristas representan las “incompatibilidades”.

En el dibujo no aparecen todas las aristas, pero lo de la izquierda es un  $K_{15}$  y lo de la derecha un  $K_{17}$ . Hay dos vértices,  $a$  y  $b$ , que comparten una arista extra. Si interpretamos las 22 salas como colores, distribuir a los empleados en las salas (con las restricciones que nos dicen) es lo mismo que colorear el



grafo con esos 22 colores (quizás no se usen todos). Así que, simplemente, buscamos  $p_G(22)$  y  $\chi(G)$ . Y aunque luego se puede deducir del polinomio cromático, es claro que  $\chi(G) = 17$  (así que son necesarias, como mínimo, 17 salas). Con el argumento habitual de grafos formados por trozos que comparten vértices, obtenemos que

$$p_G(k) = \frac{p_{K_{15}}(k) p_{K_{17}}(k) (k-1)}{k} = k(k-1)^3(k-2)^2 \dots (k-14)^2 (k-15)(k-16)$$

Efectivamente, el primer valor en que  $p_G(k)$  no se anula es  $k = 17$ . La respuesta a nuestro problema la obtenemos evaluando en  $k = 22$  (lo que salga en esa cuenta).

(b) ¿Y si exigiéramos que se utilizaran todas las salas?

• SOLUCIÓN: Al exigir que se utilicen exactamente las 22 salas, el análisis no es tan “limpio” como en el apartado anterior, en el que el  $p_G(22)$  era la respuesta. Y en un grafo general será muy difícil obtenerla (requiere utilizar inclusión/exclusión). La estructura especial del grafo que tenemos aquí nos facilita la tarea. Vamos a ir coloreando los vértices del grafo, cuidándonos de utilizar todos los colores, que serán  $C_1, \dots, C_{22}$ .

Empezamos, por ejemplo, coloreando el  $K_{15}$ ; nótese que utilizamos exactamente 15 colores en ello. Hay  $22!/7!$  maneras de hacerlo.

Ahora vamos a hacer una partición, en función del color del vértice  $b$ :

- asignamos a  $b$  un nuevo color (no usado en el  $K_{15}$ ): hay 7 posibilidades. Ya hemos usado 16 colores, quedan 6 por emplear (y 16 vértices por colorear). Pues elegimos 10 colores (de entre los usados en  $K_{15}$ ), más los 6 que restaban, para colorearlos. El resultado es  $\binom{15}{10} 16!$ .
- Asignamos a  $b$  un color ya usado (¡que no puede ser el de  $a$ !): hay 14 posibilidades. Faltan 7 colores por usar para 16 vértices. Necesitamos 9 más: los elegimos de los usados en el  $K_{15}$ , pero con precaución, pues hay uno prohibido (un vértice de  $K_{15}$  lleva el mismo color que  $b$ ). Y luego, usamos esos colores para los 16 vértices. En total,  $\binom{14}{9} 16!$  maneras.

Reuniéndolo todo,

$$\frac{22!}{7!} 16! \left[ 7 \binom{15}{10} + 14 \binom{14}{9} \right]$$

4. (2 puntos) Un banco nos presta  $V$  euros, que tenemos que devolver en  $N$  años. La devolución del préstamo se hace con el *sistema francés*, haciendo un pago fijo  $P$  cada mes.

(a) Llamamos  $D_n$  a la deuda que tenemos con el banco tras el pago del mes  $n$ . Así,  $D_0 = V$ . Tras el pago del primer mes debemos lo del mes anterior, con los correspondientes intereses, menos el pago realizado. Es decir,

$$D_1 = D_0 \alpha - P$$

(si suponemos que  $R$  es el tipo simple anual,  $\alpha = 1 + R/12$ , pero esto no es muy relevante aquí). En general, se tiene que

$$D_n = \alpha D_{n-1} - P, \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Resuelve esta recurrencia para obtener una fórmula de lo que le debemos al banco tras cada mes.

• SOLUCIÓN: Si  $D(x)$  es la función generatriz de los  $D_n$ , se debe cumplir que

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n = V + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} D_{n-1} x^n - P \sum_{n=1}^{\infty} x^n = V + \alpha x D(x) - P \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right),$$

de donde

$$(1 - \alpha x) D(x) = V - P \frac{x}{1-x} \implies D(x) = \frac{V - (P + V)x}{(1-x)(1-\alpha x)}.$$

Pues nada, a desarrollar en serie de potencias, fracciones simples y todo eso. Lo que sale (ahorro las cuentas) es que

$$D(x) = \frac{P}{\alpha - 1} \frac{1}{1-x} + \left( V - \frac{P}{\alpha - 1} \right) \frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{P}{\alpha - 1} + \left( V - \frac{P}{\alpha - 1} \right) \alpha^n \right) x^n$$

(utilizamos que  $\alpha \neq 1$ ). Así que, finalmente,

$$D_n = \frac{P}{\alpha - 1} + \left( V - \frac{P}{\alpha - 1} \right) \alpha^n, \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

(b) Desde luego,  $V$ ,  $N$  y  $\alpha$  son datos. Pero, ¿se te ocurre alguna manera de determinar el pago mensual  $P$  que hay que hacer?

• SOLUCIÓN: Hay una información extra que no hemos utilizado hasta ahora. Y es que, aunque a veces cuesta creerlo, llega un momento en que se termina de pagar una hipoteca. En concreto, para nuestro contrato, tras el pago del mes  $12N$ , nuestra deuda con el banco se salda. Así que  $D_{12N} = 0$ . Con esto,

$$0 = D_{12N} = \frac{P}{\alpha - 1} + \left( V - \frac{P}{\alpha - 1} \right) \alpha^{12N} \implies P = V(\alpha - 1) \left( 1 - \frac{1}{\alpha^{12N}} \right)^{-1}.$$

Poned  $\alpha = 1 + R/12$ , donde  $R$  es el tipo de interés anual simple (que hoy puede rondar el 4-5%),  $V = 120000$  euros (20 millones de pelas),  $N = 25$  años... y echad cuentas.

*El siguiente ejercicio supone un punto extra. Por supuesto, su dificultad es algo mayor que la de los ejercicios anteriores. Mi consejo es que sólo se intente abordar cuando se haya terminado con los anteriores.*

5. (1 punto) En la sucesión de Fibonacci, dada por  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  y  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  para cada  $n \geq 2$ , cuyos primeros términos son

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

se encuentran, sin mucha dificultad, múltiplos de 2, de 3, de 5, de 7, etc. Prueba que la sucesión contiene un múltiplo de 100 (de hecho, hay infinitos).

• SOLUCIÓN: Buscamos un múltiplo de 100 en la sucesión de Fibonacci. O, lo que es lo mismo, buscamos un **cero** (además de  $F_0$ ) en la sucesión de los números de Fibonacci módulo 100,

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccccc} F_n \rightarrow & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144 & 233 & 377 & 610 & \dots \\ F_n \pmod{100} \rightarrow & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 44 & 33 & 77 & 10 & \dots \end{array}$$

(la sucesión de abajo). El argumento hay que hacerlo con las posibles parejas de restos (puesto que la sucesión de Fibonacci queda determinada en cuanto demos dos términos consecutivos). Hay  $100^2$  posibles parejas de éstas, porque hay 100 posibles restos módulo 100. Así que, si tomamos los primeros  $100^2 + 1$  términos de la sucesión, tendremos, con seguridad, una pareja que se repite:

$$\begin{array}{c} F_0 \qquad \qquad \qquad F_{100^2+1} \\ | \quad \boxed{ab} \quad \quad \quad \boxed{ab} \quad | \end{array}$$

Ya tenemos un patrón que se va a repetir indefinidamente: el formado por los restos entre las dos apariciones de la pareja  $(a, b)$ . Para adelante... y para atrás. Y atención, hacia atrás tenemos que  $F_0 = 0$ . Así que hay ceros (todos los queramos) en esta sucesión y, por tanto, múltiplos de 100 entre los  $F_n$ . Con el ordenador, se puede comprobar que, en realidad, el patrón que se repite tiene longitud bastante más corta que  $100^2 + 1$ . La sucesión de los restos módulo 100 de la sucesión de Fibonacci es

$$\begin{array}{cccccccccccc} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & \dots & \dots & F_{300} & F_{301} & F_{302} & F_{303} & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

Lo que no quita que pueda haber ceros anteriores a  $F_{300}$ . Por ejemplo,

$$F_{150} = 9969216677189303386214405760200.$$