

Problema 1:

a) $C=12$

b.1) Densidad de X : $f_X(x) = 12x^2(1-x)$; $0 < x < 1$.

b.2) Densidad de Y : $f_Y(y) = 4y^3$; $0 < y < 1$.

c.1) Densidad de $(X|Y = y_0)$; $0 < y_0 < 1$ es $\frac{3x^2}{y_0^3}$; $0 < x < y_0$.

c.) Densidad de $(Y|X = x_0)$; $0 < x_0 < 1$ es $\frac{1}{1-x_0}$; $x_0 < y < 1$.

Como las densidades condicionadas no coinciden con las marginales, las variables no son independientes. También es correcto decir que no son independientes porque el rango de x donde $f(x, y) \neq 0$ para un y fijo depende de y .

Problema 2

a) $C = \lambda^2$.

b.1) Calculamos

$$E(X) = \lambda^2 \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda}$$

Por el resultado anterior, el estimador por momentos $\hat{\lambda}_{MM}$ cumple $\bar{X} = \frac{2}{\hat{\lambda}_{MM}}$, luego

$$\hat{\lambda}_{MM} = \frac{2}{\bar{X}}$$

b.2) Claramente, $\bar{X} = X$ si $n = 1$, en cuyo caso

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{X}\right) &= \int_0^\infty x^{-1} (\lambda x)^2 e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Por tanto, si $n = 1$

$$Sesgo(\hat{\lambda}_{MM}) := E(\hat{\lambda}_{MM}) - \lambda = \lambda \neq 0,$$

esto es, el estimador no es centrado. (un cálculo más elaborado muestra que $Sesgo(\hat{\lambda}_{MM}) = \frac{\lambda}{2n-1} \forall n$).

c) Dados datos muestrales $x_1, \dots, x_n > 0$ de una muestra aleatoria (X_1, \dots, X_n) de X , la función de verosimilitud

$$L(\lambda) = \prod_{j=1}^n f_\lambda(x_j) = \lambda^{2n} \left(\prod_{j=1}^n x_j \right) \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^n x_j\right)$$

Tenemos que $L(\lambda) > 0$ si $\lambda > 0$ y $L(0) = L(+\infty) = 0$, de donde el máximo $L(\lambda)$ para $\lambda > 0$ se alcanza donde se alcance el máximo de $\log L(\lambda)$ en el mismo rango.

$$\log L(\lambda) = 2n \log \lambda - \lambda \sum_{j=1}^n x_j + Const.$$

Por tanto,

$$\log L(\lambda)' = 0 \iff \frac{2n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n x_j = 0$$

de donde $\lambda = \frac{2n}{\sum_{j=1}^n x_j}$, es decir,

$$\hat{\lambda}_{MV} = \frac{2}{\bar{X}}$$

Problema 3

- a) En el problema hay una sola población y se consideran dos características (Estudios *versus* Gustos musicales). Por tanto, el contraste es de independencia
 b) A partir de la tabla de frecuencias observadas del problema, confeccionamos la tabla de frecuencias esperadas:

$$e_{ij} :$$

	B	M	S
R	56	56	48
P	45,5	45,5	39
C	38,5	38,5	33

y con ella calculamos el estadístico $O = \sum \frac{O_{ij}^2}{e_{ij}} - n = 92,33$. Hay que comparar O con $\chi^2_{4;\alpha=0,05} = 9,49 < O$, luego rechazamos la independencia.

- c) La proporción observada de S (estudios superiores) es $\bar{x} = \frac{120}{400} = 0,3$. Si tomamos como hipótesis nula $H_0 : p = p_0 = 0,35$, como la muestra es grande y p_0 no es ni grande ni pequeña, podemos tomar la región de rechazo asintótica

$$R = \{|\bar{x} - p_0| \geq z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\}$$

Estar en R equivale a que $0,05 \geq z_{\alpha/2} \cdot 0,0258$, o sea, $z_{\alpha/2} \leq 2,1$, o bien (viendo la tabla de la Normal), $\alpha \leq 0,036$, que es el p-valor del contraste. Si damos un nivel de significación $\alpha = 0,05$, como es mayor que el p-valor, rechazamos H_0 .

Problema 4

- a) Por la fórmula de la Probabilidad Total,

$$\begin{aligned} P(\text{Ganar}) &= P(\text{Ganar}|\text{Cara})P(\text{Cara}) + P(\text{Ganar}|\text{Cruz})P(\text{Cruz}) \\ &= P(B(2, 1/2) = 1) \frac{1}{2} + P(B(3, 1/2) = 1) \frac{1}{2} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

- b) Sea X la V.A "ganancia sobre Pedrito". X es una V.A tal que

$$\begin{cases} P(X = a) = \frac{7}{16} \\ P(X = -b) = \frac{9}{16} \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{N})$$

luego $E(X) = \frac{7a-9b}{16}$. La condición $E(X) = 0$ equivale a $7a - 9b = 0 \iff a = \frac{9}{7}b$, y como 7 y 9 son primos entre sí, el menor valor de $b = 7$, luego $a = 9$.

- c) Aplicamos Bayes:

$$P(\text{Cara}|\text{Ganar}) = P(\text{Ganar}|\text{Cara}) \frac{P(\text{Cara})}{P(\text{Ganar})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{4}{7}$$