

4.- PROBLEMA (10 puntos). Se ha detectado que el cuello de botella en una aplicación se produce al leer del disco. Para solucionarlo, se plantean dos alternativas:

- Comprar un disco con tiempo de acceso menor, pero más caro. En este caso, se encolan las peticiones cuando el disco se encuentre ocupado.
- Poner dos discos en espejo (*mirroring*) que tendrán un tiempo de acceso mayor que el anterior, pero más baratos. En este caso, se accede indistintamente a cualquiera de los dos discos cuando se produce una petición, dependiendo de cual esté libre, encolándose todas las peticiones en una cola común.

(Datos numéricos: tiempo medio de acceso disco rápido: 10 ms; tiempo medio de acceso de cada disco lento: 15 ms. En ambos casos se supone distribución exponencial).

Suponiendo que la aplicación es la única que realiza los accesos a disco, que las peticiones de lectura se producen según un proceso de Poisson, y que las colas se pueden suponer infinitas:

4.1.- (4 puntos) Calcular para ambos casos el número medio de peticiones por segundo que se podrán satisfacer para obtener un tiempo medio de lectura igual a 100 ms.

a) Caso de un único disco. Se puede modelizar con un sistema M/M/1, por los datos dados en el problema.

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \Rightarrow W(\mu - \lambda) = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{W\mu - \lambda}{W} = \mu - \frac{\lambda}{W}$$

En este caso: $\mu = \frac{1}{10^{-2}} = 100 \text{ s}^{-1}$, $W = 0.1 \text{ s}$. $\Rightarrow \lambda = 100 - 10 = 90 \text{ s}^{-1}$

b) Caso de dos discos. Se puede modelizar con un sistema M/M/2

$$\rho = \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2(1 - \frac{\lambda}{2\mu})}} = \frac{\lambda}{2(1 - \frac{\lambda}{2\mu}) + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2(1 - \frac{\lambda}{2\mu})}} = \frac{2 - \frac{\lambda}{\mu}}{2 - \frac{\lambda}{\mu} - (\frac{\lambda}{\mu})^2 + (\frac{\lambda}{\mu})^2} = \frac{2 - \frac{\lambda}{\mu}}{2 + \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}$$

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{(\lambda/\mu)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$$

$$\rho_0 = \frac{1}{1 - \rho} \Rightarrow \rho_2 = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{2\mu(2\mu + \lambda)}$$

$$= \frac{\lambda^2}{2\mu(2\mu + \lambda)} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} = \frac{\lambda^2}{2\mu(2\mu + \lambda)} + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}$$

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho_0 \rho}{1 - \rho} + \rho \right) = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\lambda^2}{\mu(2\mu + \lambda)} + \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} \right] = \frac{\lambda}{\mu(2\mu + \lambda)} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(4\mu^2 - \lambda^2)} + \frac{1}{\mu} = (\dots)$$

$$(\dots) = \frac{\lambda^2 + 4\mu^2 - \lambda^2}{\mu(4\mu^2 - \lambda^2)} = \frac{4\mu}{4\mu^2 - \lambda^2}$$

$$W(4\mu^2 - \lambda^2) = 4\mu \Rightarrow 4W\mu^2 - W\lambda^2 = 4\mu$$

$$\lambda^2 = \frac{4W\mu^2 - 4\mu}{W} = 4\mu^2 - 4\frac{\mu}{W}$$

$$\lambda = 2 \sqrt{\mu^2 - \frac{\mu}{W}}$$

Sustituyendo: $\mu = \frac{1}{0.015} = 66.6 \text{ s}^{-1}$

$W = 0.1 \text{ s}$

$$\lambda = 122.93 \text{ s}^{-1}$$

4.2.- (4 puntos) Calcule la tasa de peticiones para la que ambos casos dan el mismo rendimiento, y el tiempo medio de lectura para este caso.

En este caso, $W_A = W_B$. Igualando las fórmulas obtenidas en el apartado anterior:

$$\frac{1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{4\mu_2}{4\mu_2^2 - \lambda^2}$$

Donde μ_1 es la tasa de servicio del sistema con un disco.
 μ_2 es la tasa de servicio del sistema con dos discos.

Despejando λ :

$$4\mu_2^2 - \lambda^2 = 4\mu_2\mu_1 - 4\mu_2\lambda$$

$$\lambda^2 - 4\mu_2\lambda + 4\mu_1\mu_2 - 4\mu_2^2 = 0 \quad \text{Resolviendo la ecuación:}$$

$$\lambda = \frac{2\mu_2 \pm \sqrt{4\mu_2^2 + 4\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_2}}{2} = \mu_2 \pm \sqrt{8\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_2}$$

$$\lambda = \frac{2\mu_2 \pm 2\sqrt{2\mu_2^2 - \mu_1\mu_2}}{2}$$

Sustituyendo por sus valores:

$$\mu_1 = \frac{1}{0.01} \quad \mu_2 = \frac{1}{0.015}$$

$$\lambda = 133.3 \pm 94.28 = \begin{cases} 227.61 \text{ (1)} \\ 39.0554 \end{cases}$$

(1) se descarta esa solución por producir un valor $\rho > 1$

En este caso, $W = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} = 16.4 \text{ ms.}$

4.3.- (2 puntos) Si los dos discos tienen los mismos MTTF y MTTR, justifique qué alternativa es más fiable calculando y comparando las disponibilidades en ambos casos.

(Contestar a la vuelta de la hoja)

La disponibilidad del primer sistema vendrá dada por:

$$A_1 = \frac{MTTF}{MTTR + MTTF}$$

Que será la disponibilidad de cada disco por separado.

En el caso del sistema de los discos, la disponibilidad se calculará a partir de la de cada disco:

$$A_2 = 1 - (1 - A_1)^2 = 1 - 1 + 2A_1 - A_1^2 = 2A_1 - A_1^2 = A_1(2 - A_1)$$

Como $A_1 < 1$, $2 - A_1 > 1$ $A_1(2 - A_1) > A_1$

$$\Rightarrow A_2 > A_1$$

Por tanto, la disponibilidad del segundo sistema es mayor.