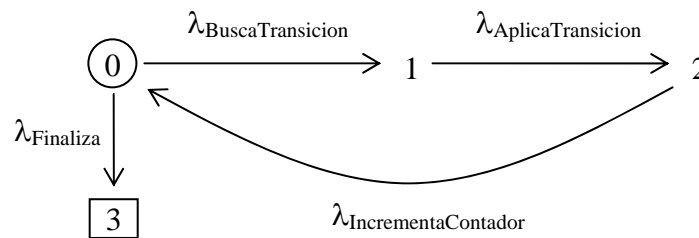


**Problema 1 (2,25 puntos).** Decir razonadamente si existe una máquina de Turing que a partir de una cadena de la forma  $M:w$ , donde  $M$  es la codificación de una máquina de Turing y  $w$  es una palabra cualquiera, deje sobre la cinta otra palabra de la forma  $I^n$ , donde  $n$  es el número de pasos que la máquina  $M$  da antes de pararse, comenzando su ejecución a partir de la palabra  $w$ . En el caso en que la máquina  $M$  no se pare, el comportamiento de la máquina pedida podrá ser arbitrario.

**Solución problema 1:**

La máquina indicada se puede construir como una variante de la máquina de Turing universal, de la siguiente manera:



manteniendo durante su ejecución en la cinta las mismas palabras que la máquina de Turing universal, a las que se concatena la cadena  $;I^m$ , donde  $m$  es el número de pasos de la máquina  $M$  simulados, que se actualiza mediante la submáquina *IncrementaContador*. La máquina así definida no se para si la máquina emulada tampoco lo hace.

**Problema 2 (2,25 puntos).** Demostrar razonadamente si existe una función recursiva primitiva cuyos valores coincidan con los de la función definida como sigue:

$$f(x, y) = (x > 0) ? f(x-1, y+1)^2 : y$$

**Solución problema 2:**

La función es primitiva recursiva, pues sus valores son

$$f(x, y) = (y + x)^{2^x}$$

que coinciden con los de la función  $h(x, y)$  definida como sigue:

$$h(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$$

$$g(r, s) = r^s$$

$$u(x, y) = x+y$$

$$v(x, y) = 2^x$$

y las funciones  $g$ ,  $u$  y  $v$  son primitivas recursivas, pues se pueden definir como sigue:

$$g(r, s) = r \cdot g(r, s-1) \text{ si } s > 0$$

$$g(r, 0) = 1$$

$$u(x, y) = u(x-1, y) + 1 \text{ si } x > 0$$

$$u(0, y) = y$$

$$v(x, y) = 2 \cdot v(x-1, y) \text{ si } x > 0$$

$$v(0, y) = 1$$

**Problema 3 (3,25 puntos).** a) Construir un sistema formal que produzca las cadenas de la forma  $\underline{x}:\underline{y}$  con  $\underline{x} \in ((0+1)2)^+$ , de manera que  $\underline{y}$  sea la palabra que se obtiene al quitar

los doses de  $\underline{x}$ . Por ejemplo, el sistema deberá producir la palabra 021212021212:011011.

b) Construir un sistema formal que produzca las cadenas de la forma  $\underline{x}:\underline{y}$  con  $\underline{x}, \underline{y} \in (0+1)^+$ , tales que  $\underline{y}$  tenga en el lugar  $j$ -ésimo a la cifra que aparece en el lugar  $(2j-1)$ -ésimo en  $\underline{x}$ . Por ejemplo, el sistema deberá producir la palabra 011010011010:011011.

### Solución problema 3:

a)

$\underline{x}, \underline{y} \in (0+1)^+$

02:0

12:1

$\underline{x}:\underline{y} \rightarrow 02\underline{x}:0\underline{y}$

$\underline{x}:\underline{y} \rightarrow 12\underline{x}:1\underline{y}$

Palabras aceptadas:  $\underline{x}:\underline{y}$

b)

$\underline{x}, \underline{y} \in (0+1)^+$

0I0

1I1

$\underline{x}I\underline{y} \rightarrow \underline{x}00I\underline{y}0$

$\underline{x}I\underline{y} \rightarrow \underline{x}01I\underline{y}1$

$\underline{x}I\underline{y} \rightarrow \underline{x}10I\underline{y}0$

$\underline{x}I\underline{y} \rightarrow \underline{x}11I\underline{y}1$

$\underline{x}I\underline{y} \rightarrow \underline{x}0:\underline{y}$

$\underline{x}I\underline{y} \rightarrow \underline{x}1:\underline{y}$

$\underline{x}I\underline{y} \rightarrow \underline{x}:\underline{y}$

Palabras aceptadas:  $\underline{x}:\underline{y}$

**Problema 4 (2,25 puntos).** Se considera la siguiente expresión  $\lambda$ :

$$(\lambda a. \lambda b. b) ((\lambda x. y(x x)) (\lambda u. v(u u))) \lambda w. w$$

Demostrar que es equivalente mediante evaluación sucesiva de subexpresiones a otras infinitas expresiones  $\lambda$ . Demostrar que también es equivalente a una expresión  $\lambda$  a la que no se le pueden aplicar reglas de evaluación (es decir, que está en forma normal).

### Solución problema 4:

$(\lambda a. \lambda b. b)((\lambda x. y(x x))(\lambda u. v(u u)))\lambda w. w$  se evalúa a  $(\lambda b. b)(\lambda w. w)$  que a su vez es equivalente mediante evaluación a  $\lambda w. w$ , que está en forma normal.

Si en lugar de evaluar las aplicaciones de funciones  $\lambda$  de izquierda a derecha comenzamos por la segunda aplicación, que está entre paréntesis, vemos que  $(\lambda x. y(x x))(\lambda u. v(u u))$  se evalúa a  $y(\lambda x. y(x x))(\lambda u. v(u u))$ , que a su vez se evalúa a  $yv(\lambda x. y(x x))(\lambda u. v(u u))$ , y ésta expresión se evalúa a  $yvv(\lambda x. y(x x))(\lambda u. v(u u))$ , que de nuevo se evalúa a  $yvvv(\lambda x. y(x x))(\lambda u. v(u u))$  y así sucesivamente, por lo que las siguientes expresiones son equivalentes a la inicial y se obtienen a partir de ésta mediante evaluación sucesiva de subexpresiones:

$$(\lambda a. \lambda b. b)(y(\lambda x. y(x x))(\lambda u. v(u u)))\lambda w. w$$

$$(\lambda a. \lambda b. b)(yv(\lambda x. y(x x))(\lambda u. v(u u)))\lambda w. w$$

$$(\lambda a. \lambda b. b)(yvv(\lambda x. y(x x))(\lambda u. v(u u)))\lambda w. w$$

$$(\lambda a. \lambda b. b)(yvvv(\lambda x. y(x x))(\lambda u. v(u u)))\lambda w. w$$

etc